

حالة خاصة 2:

يمكن لدينا المعادلة تفاضلية : $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$ (11)
 وليكن y_1 حل خاص لهذه المعادلة (11)
 عندئذٍ يجب أن تكون:

$$(12) \quad y_1'' + p(x) \cdot y_1' + q(x) \cdot y_1 = 0$$

لنضرب الأولى بـ y_1 ولنضرب الثانية بـ y
 نصول على:

$$(11)' \quad y_1 \cdot y'' + p(x) \cdot y_1 \cdot y' + q(x) \cdot y_1 \cdot y = 0$$

$$(12)' \quad y \cdot y_1'' + p(x) \cdot y \cdot y_1' + q(x) \cdot y \cdot y_1 = 0$$

نطرح (2) من (1) فنجد أن:

$$(13) \quad y_1 \cdot y'' - y \cdot y_1'' + p(x) (y_1 \cdot y' - y \cdot y_1') = 0$$

لنحسب الآن قيمة محدرونا لنستعمل للدلالة $\frac{d}{dx}$

$$(14) \quad w(y, y_1) = \begin{vmatrix} y & y_1 \\ y' & y_1' \end{vmatrix} = y \cdot y_1' - y_1 \cdot y'$$

لنتحقق طرفي هذه المعادلة بالنسبة لـ x فنجد أن:

$$\frac{dw}{dx} = y_1' \cdot y' + y \cdot y_1'' - y_1 \cdot y'' - y_1' \cdot y'$$

$$(15) \Rightarrow \frac{dw}{dx} = y \cdot y_1'' - y_1 \cdot y''$$

بتعويض (14) و (15) في (13) نجد أن:

$$(-x) \quad - \frac{dw}{dx} + p(x) \cdot w = 0$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى للمتغير التابع w ؛ خطية متجانسة تماماً
 معادلة المتحولات المنفصلة:
 $w' = -p(x) \cdot w \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{w'}{w} = -p(x)$$

بالمكاملة نجد أن:

$$\ln \frac{w}{c_1} = - \int p(x) dx$$

ومن ثَمَّ:

$$w = c_1 \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

$$y_1 y_1' - y_1 y_2' = c_1 \cdot e^{-\int p(x) dx} \quad \text{لكن}$$

$$y_1 y_1' - y_1 y_2' = c_0 \cdot e^{-\int p(x) dx}; \quad c_0 = -c_1$$

نقسم طرفي المعادلة على y_1^2

$$\frac{y_1 y_1' - y_1 y_2'}{y_1^2} = c_0 \cdot \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{y_1 y_1' - y_1 y_2'}{y_1^2} \quad \text{وبما أن}$$

إذاً نجد أن

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{c_0 \cdot e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{c_0 \cdot e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx + c_2 \quad \text{بالمكاملة نجد أن:}$$

ومن ثَمَّ فإن الحل العام للمعادلة يمكن كتابته:

$$y_2 = y_1 \left[\int \frac{c_0 \cdot e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx + c_2 \right]$$

وهذه العلاقة تعرف بمبركة ليوفيل واستغفروا سيدي.

★ هذا الشكل أصبح لدينا ثلاثة طرق للبحث عن الحل العام لمعادلة تفاضلية خطية من رتبة الثانية علم لها حل خاص واحد وهو y_1 .

ملاحظة 2: باستخدام علاقة ليوفيل ارستوفارسكي يجب أن يكون معامل أكبر منصفه ياوه الواحد.

مثال توضيحي: أوجد الحل العام للمعادلة: $x^2 y''' - 2y'' = 0$ إذا علمت أن $y_1 = x$ حل خاص وذلك وفق طريقة ليوفيل.

الحل: الحل العام وفق علاقة ليوفيل يعطى بالعلاقة:
 $y = y_1 \left[\int \frac{c_1 \cdot e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx + c_2 \right]$; c_1, c_2 ثوابت اختيارية.

~~$y'' - \frac{2}{x^2} y = 0$~~ $y'' - \frac{2}{x^2} y = 0$

$y = x^2 \left[\int \frac{c_1 \cdot e^{\int p(x) dx}}{x^4} dx + c_2 \right]$ $p(x) = 0$

$y = x^2 \left[\int \frac{c_0}{x^4} dx + c_2 \right]$; $c_0 = c_1 \cdot e^x$

$(x^2 \cdot x)$ $y = x^2 \left[c_0 \frac{1}{-3x^3} + c_2 \right]$

$y = c_3 \frac{1}{x} + c_0 x^2$, $c_3 = \frac{c_0}{-3}$

2- أوجد الحل العام للمعادلة: $y'' + y' + e^{-2x} y = 0$ إذا علمت أن $y_1 = \cos(e^{-x})$ حل خاص وذلك وفق طريقة ليوفيل.

الحل: الحل العام وفق علاقة ليوفيل:
 $y = y_1 \left[\int \frac{c_1 \cdot e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx + c_2 \right]$

$y = \cos(e^{-x}) \left[\int \frac{c_1 \cdot e^{-\int dx}}{(\cos(e^{-x}))^2} dx + c_2 \right]$

SUBJECT:

$$y = \cos e^{-x} \left[\int \frac{c_1 \cdot e^{-x}}{\cos^2 e^{-x}} dx + c_2 \right]$$

$$-e^{-x} dx = dt \quad \leftarrow e^{-x} = t \quad \text{نُفرض}$$

$$y = \cos e^{-x} \left[c_1 \int \frac{-dt}{\cos^2 t} + c_2 \right]$$

$$y_h = \cos e^{-x} [-c_1 \cdot \tan e^{-x} + c_2]$$

$$y_h = \cos e^{-x} \left[c_0 \cdot \frac{\sin e^{-x}}{\cos e^{-x}} + c_2 \right] \quad \text{و } c_0 = -c_1$$

$$y_h = c_0 \cdot \sin e^{-x} + c_2 \cdot \cos e^{-x} \quad \text{و } c_0 = -c_1$$

تأخذ الحلول هي:

$$y_1 = \cos e^{-x}$$

$$y_2 = \sin e^{-x}$$

المعادلة التفاضلية الخطية غير متجانسة:

الشكل العام لها كالتالي هو

$$\text{II} \quad L(y) = F(x)$$

حيث L مؤثر تفاضلي خطي من الرتبة n

$$\text{المعادلة} \quad L(y) = 0$$

تدعى هذه معادلة التفاضلية الخطية المتجانسة المناظرة للمعادلة II و لنفرض

أن y_1 الحل العام للمعادلة II

ولنفرض أن y_p هو حل خاص للمعادلة II عندئذ نستبين أن الحل العام

للمعادلة II هو $y = y_1 + y_p$ ما هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة

مضافاً إليه حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير متجانسة أي أن الحل العام

$$\text{للمعادلة II يعطى بالعلاقة: } y = y_h + y_p$$

مبرهنة: إن الحل العام للمعادلة $L(y) = F(x)$ ما هو إلا الحل العام المتجانس للمعادلة
عضافاً إليه حل خاص للمعادلة الخطية غير متجانسة.

الكل: لنفرض أن y_h هو الحل العام للمعادلة $L(y) = 0$ أي أن $L(y_h) = 0$

ولنفرض أن y_p هو الحل الخاص للمعادلة $L(y) = F(x)$ أي أن $L(y_p) = F(x)$

ولنثبت أن $y = y_h + y_p$ هو الحل العام للمعادلة $L(y) = F(x)$
أي لنثبت أن $L(y_h + y_p) = F(x)$

$$L(y_h + y_p) = L(y_h) + L(y_p) = 0 + F(x) = F(x)$$

نستنتج من هذه الملاحظة أن $y = y_h + y_p$ حل للمعادلة $L(y) = F(x)$ وهو بالوقت
نفسه حل عام لأنه يحتوي على عدد من الثوابت الكافية ليأوي رتبة
المعادلة تفاضلية وهذه الثوابت موجودة ضمن y_h .

ملاحظة 1: إذا كان لدينا المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n غير متجانسة الخطية:

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x) \quad (*)$$

وكان y_{p1} حل خاص للمعادلة $L(y) = f_1(x)$

$L(y) = f_2(x)$ " " " y_{p2}

$L(y) = f_k(x)$ " " " y_{pk}

عندئذ تكون الدالة $y_p = y_{p1} + y_{p2} + \dots + y_{pk}$ حل خاص للمعادلة
المعطاة (*).

مثال: لنكن لدينا المعادلة: $y'' - y = 3e^{2x} - 2\cos x$

المعادلة هذه طرفها الأيمن يتكون من مجموع دالتين الأولى $f_1(x) = 3e^{2x}$

$f_2(x) = -2\cos x$

SUBJECT:

ان الدالة $y_{p1} = e^{2x}$ هي حل خاص للمعادلة $y'' - y = 3e^{2x}$

كما ان الدالة $y_{p2} = \cos x$ هي حل خاص للمعادلة $y'' - y = -2 \cos x$

فان الدالة $y_p = y_{p1} + y_{p2} = e^{2x} + \cos x$ هي حل خاص للمعادلة المعطاة.

ملاحظة 2: اذا كان لدينا معادلة تفاضلية من الشكل:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

وإذا كانت y_{p1} و y_{p2} حلين خاصين لهذه المعادلة

$$y_{p1}'' + p(x)y_{p1}' + q(x)y_{p1} = f(x)$$

$$y_{p2}'' + p(x)y_{p2}' + q(x)y_{p2} = f(x)$$

عندئذ تكون الدالة $y_{p2} - y_{p1}$ هي حل خاص للمعادلة $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

★ هذه الملاحظة تعني لنا ان الفرق بين أي حلين خاصين للمعادلة $L(y) = f(x)$ هو حل خاص للمعادلة $L(y) = 0$.

ملاحظة 3: إذا كان لدينا معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية غير متجانسة أي من الشكل $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ وكان y_{p1} و y_{p2} حلين خاصين لهذه المعادلة عندئذ ان الفرق بين y_{p2} و y_{p1} هو حل خاص للمعادلة المتجانسة.

$$y = \underbrace{(y_{p2} - y_{p1})}_{y_h} + \underbrace{y_{p1}}_{y_p}$$

$$(1+x^2)y'' + xy' - y = 1$$

مثال توضيحي: أوجد الحل العام للمعادلة: $y_1 = x-1$; $y_2 = -1$ حلين خاصين

$$y = (y_p - y_{p_1}) z + y_{p_1}$$

$$y = (x-1+1) z + (x-1)$$

$$y = x z + (x-1)$$

نشتق عدد من الرتبة الأولى رتبة المعادلة

$$y' = z + x z' + 1$$

$$y'' = 2z' + x z''$$

نقوض في المعادلة الخطية المطاة فنجد أن

$$(1+x^2) x z'' + 2(1+x^2) z' + x z + x^2 z' + x - x z - x + 1 = x$$

بالإصلاح نجد أن:

$$(1+x^2) x z'' + (3x^2+2) z' = 0$$

نفرض $z' = u$ أي أن $z'' = u'$

$$x(1+x^2) u' + (3x^2+2) u = 0$$

معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الأولى؛ فنحل بتوحيدها

$$\frac{u'}{u} = -\frac{3x^2+2}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$3x^2+2 = (1+x^2)A + Bx^2+Cx$$

$$3x^2+2 = 1A + x^2A + Bx^2+Cx$$

بالمطابقة نجد أن

$$A+B=3 ; C=0 ; A=2$$

$$B=1$$

$$\frac{u'}{u} = -\left[\frac{2}{x} + \frac{x}{1+x^2} \right] \Rightarrow \ln \frac{u}{C} = -2 \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$\ln \frac{u}{C_1} = \ln \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} \Rightarrow u \frac{u}{C_1} = \frac{C_1}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$$

$$ze' = \frac{c_1}{x^2 \sqrt{x^2+1}} \Rightarrow z = c_1 \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}} + c_2$$

بفرض أن $x = \sinh t$ $dx = \cosh t dt$

$$z = c_1 \int \frac{\cosh t dt}{\sinh^2 t \cdot \cosh t} + c_2 \Rightarrow z = c_1 \int \frac{dt}{\sinh^2 t} + c_2$$

$$z = c_1 \cdot \coth t + c_2$$

$$z = c_1 \cdot \frac{\cosh t}{\sinh t} + c_2 = c_1 \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c_2$$

ومن هنا الحل العام للمعادلة هو:

$$y = x \left[c_1 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c_2 \right] + x - 1$$

$$y = c_1 \sqrt{x^2+1} + x c_2 + x - 1$$

$$y = c_1 \sqrt{x^2+1} + \underbrace{(c_2+1)}_{c_3} x - 1$$

مبرهن لاغرانج (المبرهن برنارد):

إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية $L(y) = f(x)$

وكانت الدالة y_1, y_2, \dots, y_n هي قاعدة الحلول للمعادلة $L(y) = 0$ عندئذٍ الحل الخاص للمعادلة $L(y) = f(x)$ يعطى بالعلاقة:

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} dx + y_2 \int \frac{w_2}{w} dx + \dots + y_n \int \frac{w_n}{w} dx$$

حيث w_j هي المحدد التي نحصل عليها

من المحدد فرونسه باستبدال عناصر العود ذو الدليل j بالعناصر $0, 0, \dots, 0$ في $F(x)$.

أمثلة: لنكن لدينا معادلة تفاضلية:

ولنفرض أننا نعلم قاعدة الحلول لهذه المعادلة ولكن $y_1 = e^x$; $y_2 = e^{-x}$

أوجد الحل الخاص:

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} dx + y_2 \int \frac{w_2}{w} dx$$

$$w(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ 3e^{2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -3e^x$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 3e^{2x} \end{vmatrix} = 3e^{3x}$$

نعوض في العلاقة:

$$y_p = \frac{1}{-2} e^x \int \frac{-3e^x}{-2} dx + e^{-x} \int \frac{3e^{3x}}{-2} dx$$

$$y_p = \frac{3}{2} e^{2x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} e^{2x}$$

$$\boxed{y_p = e^{2x}}$$

ملاحظات:

من خلال ما درسنا إلى الآن نلاحظ أنه: إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية الخطية غير متجانسة $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ وجدنا أن الحل العام لهذه المعادلة يعطى بالشكل $y = y_h + y_p$ حيث y_h هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة هو تركيب خطي من دوال قاعدة الحلول أما y_p فهو الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير متجانسة. وجدنا أن هذا الحل الخاص يعينه وفق المبرهنات الأخيرة كما بد من تعريف قاعدة الحلول للمعادلة المتجانسة المناظرة.

ملاحظة: طريقة التي تم فيها إيجاد الحل الخاص بالمبرهنات الأخيرة تفرق بطريقة كفرنبرج أو الثوابت المتغيرة.

SUBJECT:

السؤال الذي يطرح نفسه هل هناك طريقة محددة نستعملها لإيجاد قاعدة الحلول
للمعادلة تفاضلية خطية مطاة؟

1- نعم

2- لا